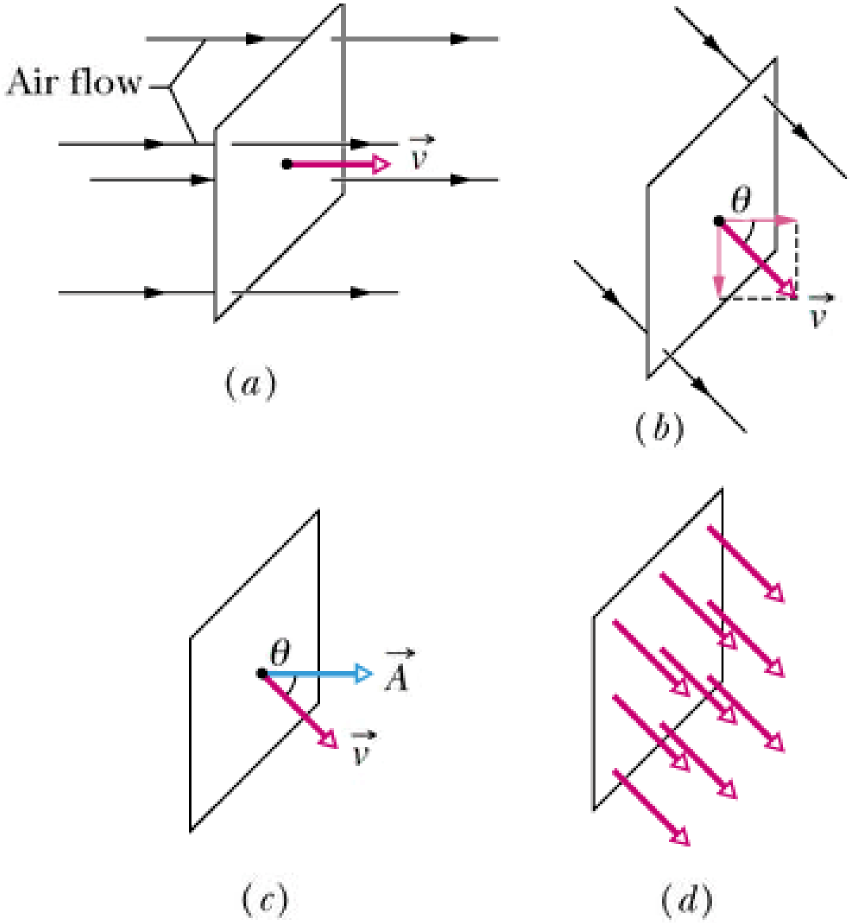
# Cap. 24 – La Ley de Gauss

- Una misma ley física enunciada desde diferentes puntos de vista
- Coulomb $\Leftrightarrow$ Gauss
- Son equivalentes
- Pero ambas tienen situaciones para las cuales son superiores que la otra
- Aquí hay encerrada una gran verdad fundamental. Es bueno tener varias maneras de mirar una misma realidad.

# El Concepto General de Flujo – Algo multiplicado por Area




## Flujo de Fluido

**Volumen que cruza una superficie en unidad de tiempo. Pero el elemento del tiempo no es fundamental al concepto de flujo mientras que la superficie sí. El concepto general de flujo es algo que cruza una superficie. Matemáticamente es algo multiplicado por área. En este caso v.**

$$\Phi = vA\cos\theta = \vec{v}\cdot\vec{A},$$

## Flujo Eléctrico

**Matemáticamente, es lo mismo excepto que tomamos el vector E en vez de v.**

**Generalizamos al caso en que E no es uniforme. Definimos muchas superficies pequeñas ΔA.**

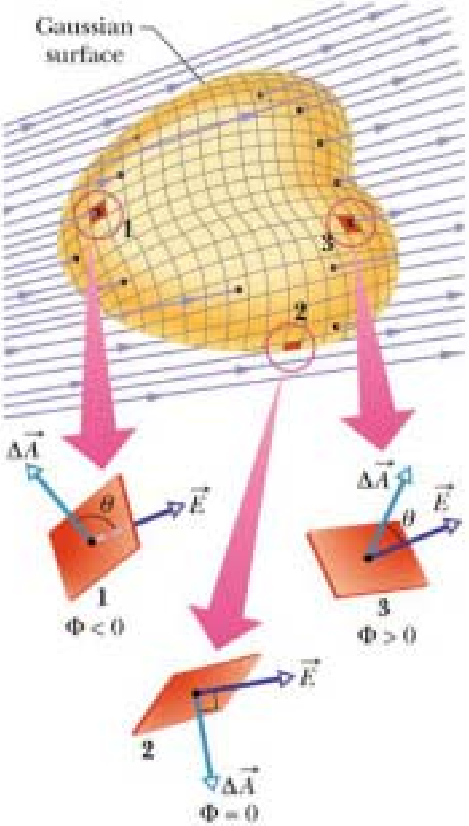
$$\Phi = \sum \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}.$$

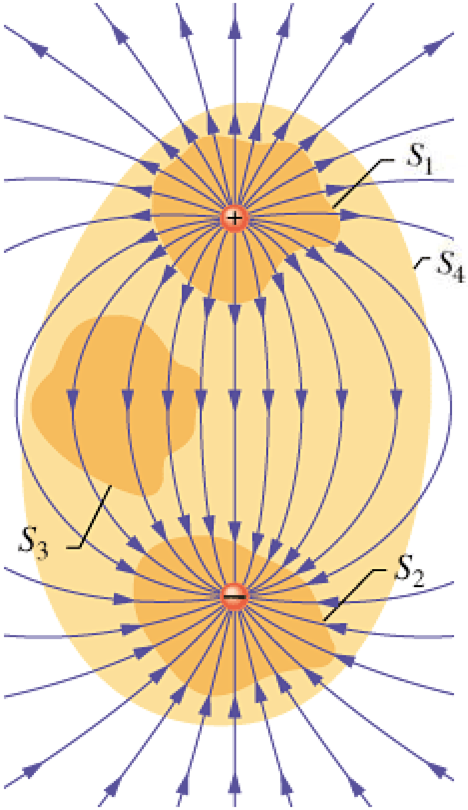
$$\int_c \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E(\cos 0)\,dA$$

# Flujo Eléctrico

- Igual que el flujo de líquido, es el producto de algo por area, en este caso E.
- La orientación de la superficie es importante.  Por lo tanto, hay que usar el producto interno (cos θ).
- Si E no es constante, hay que usar un integral.
- Es proporcional al número de lineas de campo que cruzan una superficie.
- El concepto de flujo eléctrico es nuevo para nosotros.  La manera de entenderlo es a través de la analogía con flujo de fluido.  Al final viene siendo esencialmente el número de lineas que cruzan una superficie.  Esto puede parecer un concepto raro y lo es pero resulta que juega un papel importante en la ley de Gauss como veremos próximamente.

# Qué pasa si la superficie es cerrada (Gaussiana)?




**El flujo neto es cero si no hay cargas dentro de la superficie (dibujo de la izquierda). Si hay carga adentro, el flujo neto es proporcional a la carga neta. Mire las cuatro superficies en el dibujo de la derecha S1-S4 y es fácil entender porqué esto es así. El texto en rojo es la ley de Gauss en palabras.**

# Ley de Gauss

- Cualquier superficie cerrada (imaginaria) es una superficie Gaussiana.
- La carga es la carga neta adentro de la superficie.
- Matemáticamente

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{\text{enc}}$$

# Ley de Gauss – Para qué sirve?

- Para calcular la magnitud de E en situaciones donde hay <u>mucha simetría</u>.

- Para saber cómo está distribuida la carga en situaciones donde hay materiales conductores.

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

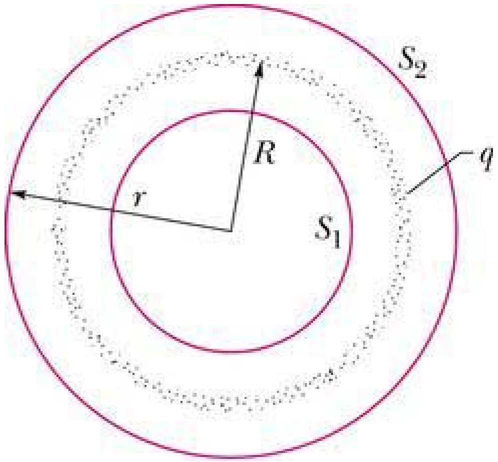
# Ley de Gauss – Cómo se usa?

- Es cierta siempre pero….
- Sólo es útil para situaciones donde hay mucha simetría.
- Su uso es sutil!!!!
- Hay que usar la simetría para saber dónde E es constante y cuál es su dirección.
- Hay que encontrar una superficie cerrada en la cual E sea constante o donde el flujo sea cero (E perpendicular a la superficie).

# Receta para la Ley de Gauss

- Escoger superficie de Gauss de acuerdo a la simetría.
  - Que pase por P.
  - Que sea cerrada.
  - Que E sea constante (por lo menos en parte) de la superficie.
  - Que E sea paralela a la superficie en las partes donde no es constante.
- El integral sale directo a una expresión algebráica que contiene E.
- Calcular $q_N$ (el meollo del asunto).
  - Es lo que distingue cada situación y cada región.
  - Es diferente en cada región.
  - A veces hay que calcular la densidad de carga. $q_N$ es el producto de densidad por el volumen de carga dentro de la superficie.
- Resolver por E algebráicamente.

# Ejemplo de Uso de Ley de Gauss – Simetría Esférica




Para toda distribución de carga con simetría esférica, podemos llegar a las mismas conclusiones acerca de E.

1) E es en direccion radial,
2) La magnitud de E es constante en la superficie de cualquier superficie esférica concéntrica con la carga. Es obvio que debemos tomar la superficie Gaussiana como tal esfera.
3) Por tanto E y da apuntan en la misma direccion y el integral del lado izquierdo de la ley de Gauss nos da

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \oint E\, dA = \epsilon_0 E\left(4\pi r^2\right)$$

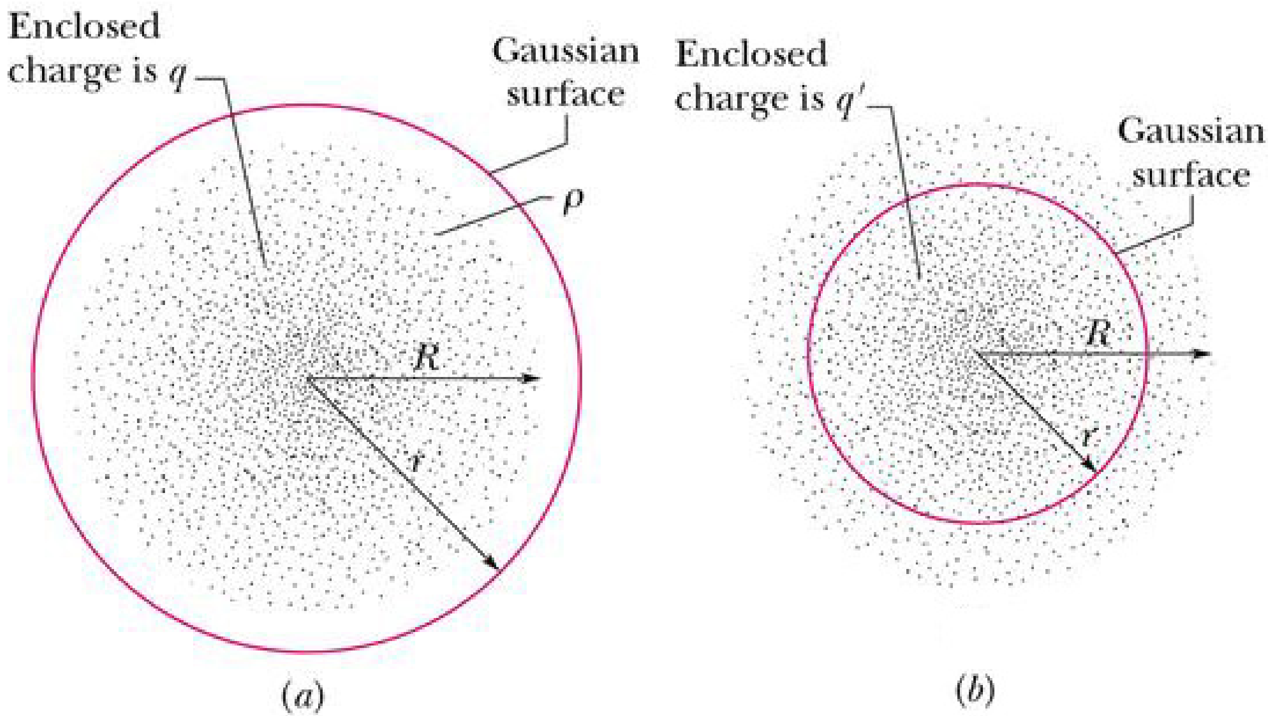
Para cada situación de simetría esférica lo que cambia es el lado derecho de la ley de Gauss. De hecho, esta es diferente aún para diferentes regiones en una misma situación. Así que el meollo de resolver uno de estos problemas es determinar cuánta carga hay dentro de la Gaussiana, $q_N$.

Tomemos el ejemplo de un cascarón esférico de carga q y radio R. (Ver dibujo.) Debemos considerar dos regiones: I) fuera del cascarón y II) dentro del cascarón. Siempre llamamos r a la distancia entre el punto donde queremos calcular E y el centro de simetría. Matemáticamente las regiones se definen como I) $r>R$ y II) $r<R$. Por supuesto, nuestra esfera Gaussiana la cogemos con radio r.

Para la región I, tomamos la esfera Gaussiana $S_2$. Es obvio que $q_N = q$ ya que esa es la carga adentro de la esfera $S_2$. En esta región la carga se comporta como si fuese puntiforme.

Para la región II, tomamos la esfera Gaussiana $S_1$. Ahora $q_N = 0$ y no hay E dentro de la carga !!!!!!

# Otro ejemplo de simetría esférica – Distribución en un Volumen




El lado izquierdo de la ley de Gauss depende solo de la simetría. Lo que tenemos que determinar es el lado derecho, o sea, la carga encerrada.

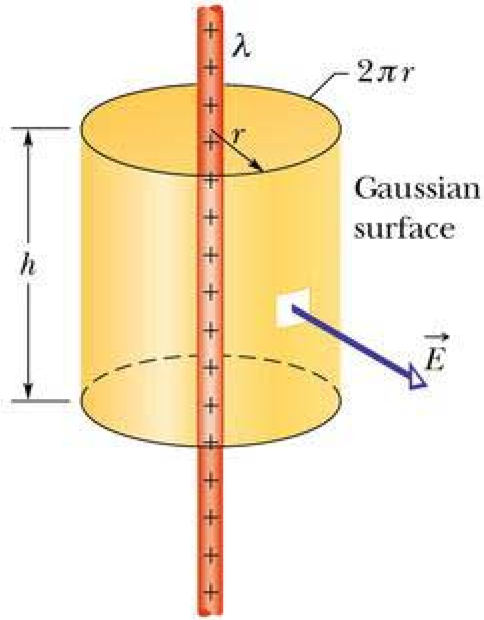
Fuera de la distribución de carga, la contestación es igual que el caso anterior.

Dentro de la carga, $q_N = \rho V_r$ donde $\rho$ es la densidad de carga = $q / V_R$.

Así que $q_N = q\frac{r^3}{R^3}$ y cuando resolvemos por E encontramos $E = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)r$ proporcional a r!

## Otro ejemplo de la Ley de Gauss

## Una Linea Recta e Infinita de Carga – Simetría Cilíndrica




- Lo de infinita es importante porque es lo que nos permite decir que todos los puntos en los lados de nuestra superficie Gaussiana cilíndrica (en amarillo) tienen la misma magnitud de E. En la práctica, por supuesto, no existen lineas infinitas pero el resultado que obtengamos será una buena aproximación al caso de puntos que quedan cerca de una linea de carga finita.

- En una situación como esta con un punto y una linea, la única dirección definida por la realidad física es la dirección radial (coordenadas cilíndricas). E tiene que ser en esa dirección.

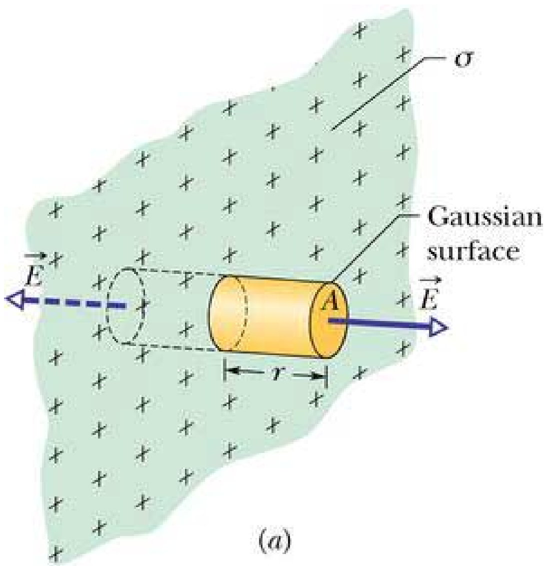
- Nuestra superficie Gaussiana tiene lados y dos tapas. En las tapas E no es constante pero da es perpendicular a E asi que el integral sobre las tapas es cero y el integral sobre los lados es $\epsilon_0 E(2\pi rh)$

- Ese resultado es siempre igual para toda simetría cilíndrica.

Como siempre, la solución al problema particular se reduce a determinar la carga dentro de la superficie. En este caso resulta ser λh donde λ es la densidad lineal de carga. Así que la ecuación de la ley de Gauss se convierte en este problema en $\epsilon_0 E(2\pi rh) = \lambda h,$ y resolviendo por E obtenemos $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ o sea el campo disminuye con la primera potencia de r no con la segunda. Esto quizás no debe extrañarnos ya que tenemos una carga mucho más grande que una carga puntiforme.

Para el caso de una linea de longitud L con carga total Q, entonces λ = Q / L y nuestro resultado es correcto solo para puntos donde r << L y que quedan lejos de los extremos de la linea.

# Ley de Gauss – Simetría Plana

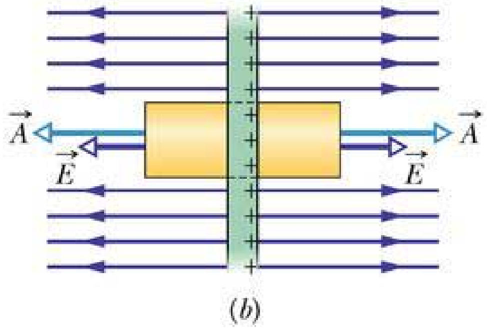



La única dirección especificada por la situación física es la dirección perpendicular al plano. Por tanto, ésta tiene que ser la dirección de E.

Puntos que quedan en planos paralelos están equidistantes al plano y tienen que tener el mismo E.

La superficie Gaussiana que usamos tiene tapas que son dos de esos planos paralelos. El flujo a través de los lados de esta superficie Gaussiana es cero. Los flujos a través de las dos tapas son iguales.

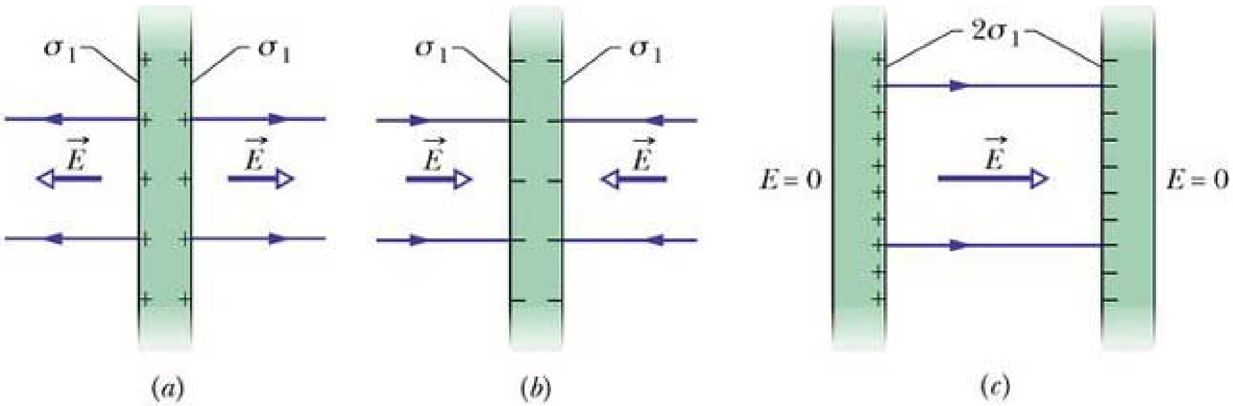
$$\epsilon_0 (EA + EA) = \sigma A,$$




$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

**E es Uniforme – Independiente de la Posición!!**

# Un caso importantísimo – Placas Paralelas




$$E = \frac{2\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

**Uniforme – Independiente de la Posición!!**

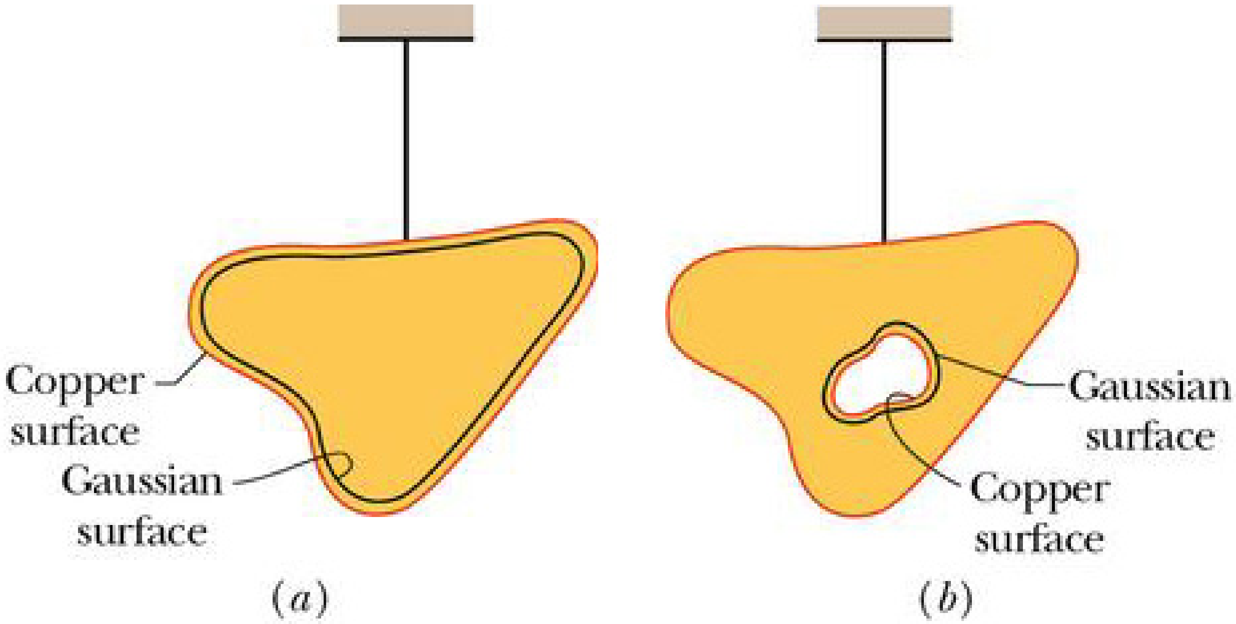
**Esta estructura se usa mucho en la práctica.**

# Un Conductor en Electrostática

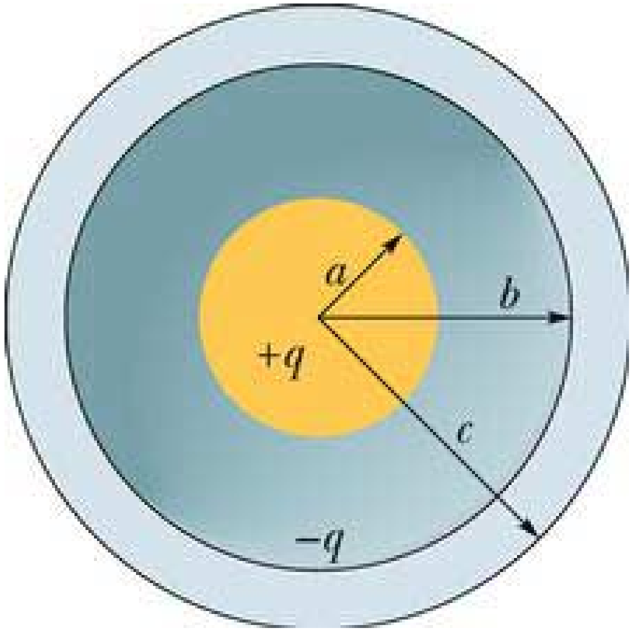
- E=0 en el cuerpo del conductor.
- La carga está localizada en la superficie (si es sólido) o las superficies (si es hueco).
- Sabiendo lo de arriba y usando la ley de Gauss, podemos determinar cuánta carga hay en las diferentes superficies de un conductor.  (Usar la ley de Gauss al revés.)

**Para un conductor, E=0 en el cuerpo del conductor!**

**La carga está en las superficies ya sea externa o interna o ambas!**



## Una esfera de carga (amarilla) dentro de un cascarón de material conductor (azul claro).




**Usando el principio que acabamos de aprender, sabemos que E=0 en la región**

**II) c > r > b, dentro del cuerpo del conductor.**

**Con la ley de Gauss podemos calcular E en las otras tres regiones como hicimos antes:**

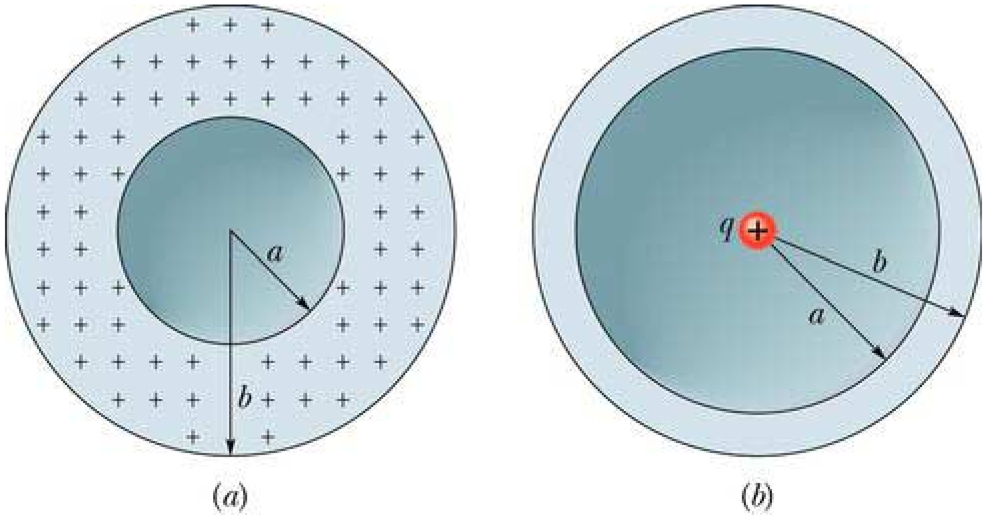
**I) r > c, afuera de todo.**

**III) b > r > a,  el hueco entre la carga y el metal.**

**IV) a > r, dentro de la carga.**

**Ese cálculo lo dejamos para que lo hagas tu.**

**Para determinar la distribución de carga en el conductor, usamos una superficie Gaussiana en la región II.  Como queda dentro del conductor, E=0 y el flujo eléctrico es cero y la carga encerrada es cero.  Eso quiere decir que, en la superficie interior del conductor, se tiene que depositar una carga que es el negativo de la carga amarilla.   Para calcular la carga en la superficie exterior, se le resta la carga interior a la carga total del conductor.  (Te tienen que decir cuál es la carga total en el conductor.  Usualmente es diferente a la carga amarilla.)**




**Dos problemas que debes poder hacer, o sea, explicar cómo se usa la ley de Gauss, cómo se usa la simetría para saber las características del campo electríco, cómo se calcula la carga encerrada para diferentes puntos en diferentes regiones, cómo se calcula la carga que hay en las superficies de los conductores.**

**(a) Una esfera (no conductora) de carga de radio b con un hueco esférico de radio a. (Hay tres regiones.)**

**(b) Una carga puntiforme en el centro de un cascarón esférico de material conductor. Hay tres regiones. Hay que determinar cuánta carga hay en las superficies del cascarón.**

**También puede venir alguna combinación de los elementos que hay en estas dos situaciones con algunos de los elementos de las situaciones que se explicaron anteriormente en las transparencias 10 y 11.**